



TITLE:

Convolution Measure AlgebraにおけるGleason Partについて (Function Space研究会報告集)

AUTHOR(S):

貴志, 一男

CITATION:

貴志, 一男. Convolution Measure AlgebraにおけるGleason Partについて (Function Space研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 96: 97-111

ISSUE DATE:

1970-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108176>

RIGHT:

Convolution measure algebra における Gleason part について

奈良高専 貴志 一男

§0. 序

G を locally compact abelian (topological) group とする.
group algebra $L^1(G)$ の maximal ideal space は G の
dual group \hat{G} であるが, measure algebra $M(G)$ の
maximal ideal space は複雑である. J. L. Taylor [12]
は, $M(G)$ の maximal ideal space とある compact abelian
(topological) semigroup S 上の semicharacter の全体 S^\wedge
と同一視出来る事を示し, その方法は convolution measure
algebra と云われる抽象的 Banach algebra に適用出来る事
を示した (その一例として, locally compact semigroup
 T 上の measure algebra $M(T)$ がある). そして多くの
興味ある uniform algebra は, ある種の convolution
measure algebra M を Gelfand 表現 (で得られる algebra
を, spectral norm で完備化して得られる).

§1 では convolution measure algebra の定義とその性質,
 §2 では examples, §3 では上のようにして得られる
 uniform algebra の Gleason part について述べる [5].

§1. Convolution measure algebra について

定義. M が次の条件を満足するとき, (abstract) complex
 L -space という.

1) M は partially ordered complex Banach space
 である.

2) $\{\mu; \mu \in M, \mu \geq 0\}$ によって生成される 閉じた実部分空
 間 M_R は, M の order を M_R に制限したとき, real Banach
 lattice で, 次の a) ~ d) を満足する.

a) $\mu, \nu \in M_R$ and $\mu, \nu \geq 0$ ならば $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$.

b) $\mu, \nu \in M_R$ and $\mu \wedge \nu = 0$ ならば $\|\mu + \nu\| = \|\mu - \nu\|$.

c) $\mu \in M$ ならば $\operatorname{Re} \mu, \operatorname{Im} \mu \in M_R$ が一意的にきまり,
 $\mu = \operatorname{Re} \mu + i \operatorname{Im} \mu$ となる.

d) $\mu \in M$ に対して, $|\mu|$ と $|\mu| = \bigvee \{ \operatorname{Re}(e^{i\theta} \mu) : 0 \leq \theta < 2\pi \}$
 で定義すると, $\|\mu\| = \| |\mu| \|$.

定義 積 \cdot が定義されている complex L -space M が,
 Convolution measure algebra (c. m. a) であるとは,

(M, \cdot) が Banach algebra でかつ次の条件を満足するときである.

- 1) $\mu, \nu \in M$ and $\mu, \nu \geq 0$ ならば $\|\mu \cdot \nu\| = \|\mu\| \|\nu\|$.
- 2) $\mu, \nu \in M$ and $\mu, \nu \geq 0$ ならば $\mu \cdot \nu \geq 0$.
- 3) μ, ν, ω は M の正な要素で, $\omega \leq \mu \cdot \nu$ ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, M の正な要素列 $\{\mu_i\}_{i=1}^n, \{\nu_j\}_{j=1}^m$ と $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m} \subset [0, 1]$ と $\sum_{i=1}^n \mu_i \leq \mu, \sum_{j=1}^m \nu_j \leq \nu$ かつ $\|\omega - \sum_{i,j} a_{ij} \mu_i \nu_j\| < \varepsilon$ を満足するように選ぶ事が出来る.

S は locally compact (topological) semigroup, $M(S)$ は S 上で定義される complex-valued, countably additive, regular Borel measure の全体とする. 積 \cdot (=convolution) は, S 上の任意の有限な Borel function f に対して, 方程式

$$\int_S f(x) d(\mu \cdot \nu)(x) = \int_S \int_S f(xy) d\mu(x) d\nu(y)$$

により定義する.

定理 1.1 ([11], [12]) S が locally compact (topological) semigroup であるならば, $M(S)$ は convolution measure

algebra である。

topological semigroup S から複素平面の閉いた単位円中への, 連続で, 恒等的に零でない, complex homomorphism を semicharacter といい, S 上に定義される semicharacter の全体を S' で表わす。

定理 1.2 (Taylor の表現定理) [12] M を単位元を $1 \rightarrow$ semisimple と commutative と convolution measure algebra とすると, ある単位元を $1 \rightarrow$ compact abelian (topological) semigroup S (M の structure semigroup といい) と, 次のような性質をもつ M から $M(S)$ の中への map $\theta: \nu \rightarrow \nu_\theta$ とが存在する。

1) θ は order を保ち, isometry であり isomorphism である。

2) $\theta(M) = M_S$ は $M(S)$ の weak-star dense な subalgebra である。

更に M の各 complex homomorphism h に対して, $\gamma \in S'$ が一意にきまり,

$$(\hat{\nu}(h) =) h(\nu) = \int_S \gamma(x) d\nu_\theta(x) \quad (= \hat{\nu}_\theta(\gamma))$$

となる。

この定理により, M の maximal ideal space と \hat{S} とは同一視する事が出来, $v \in M$ の Gelfand 表現は $\hat{v}(\gamma) = \int_S \gamma d\nu_v$ ($\gamma \in \hat{S}$) となる. 従って, \hat{S} の Gelfand topology は, function algebra $\hat{M} = \{\hat{v} : v \in M\}$ により導入される weak topology の (\hat{S}, \hat{M}) である. spectral norm は

$$\sup_{\hat{S}} |\hat{v}_0(\gamma)| = \sup_{m(M)} |\hat{v}(h)| = \lim \sqrt[n]{\|v^n\|} = \lim \sqrt[n]{\|\hat{v}_0^n\|}$$

となる. (Banach algebra A の maximal ideal space を $\pi(A)$ で表わす)

\hat{M} を spectral norm で完備化して得られた uniform algebra (\tilde{M} で表わす) を考察の対象にする. また M と M_S とを同一視して $M \subset M(S)$ と考へる.

注意 1. 定理 1.2 において

$$M : \text{semi simple} \iff \theta \text{ は isometry}$$

$$M : \text{単位元をもつ} \iff \hat{S} \text{ は compact}$$

注意 2. A を単位元をもつ commutative Banach algebra とする. $f \in A$ の Gelfand 表現を \hat{f} で表わし, $\hat{A} = \{\hat{f} : f \in A\}$ とする. \hat{A} は $\pi(A)$ の点分離し, 定数を含むから, \hat{A} の $C(\pi(A))$ における closure を B とすると, B は $\pi(A)$ 上の uniform algebra である. このとき,

$$\pi(B) = \pi(A)$$

となる,

証明 $\pi(B) \supseteq \pi(A)$ は明らか,

$\pi(B) \subseteq \pi(A)$ なる事を示すには, $\pi(B)$ の任意の元 φ に対して, ある $\pi(A)$ の元 Φ があって,

$$\varphi(f) = f(\Phi) \quad (\forall f \in B)$$

となる事を言えばよい.

$$\Phi(f) = \varphi(\hat{f}) \quad (f \in A)$$

によって Φ を定義する.

Φ は A 上で恒等的に零でなく, $\forall f, g \in A$ に対して,

$$\Phi(fg) = \varphi(\widehat{fg}) = \varphi(\hat{f} \cdot \hat{g}) = \varphi(\hat{f})\varphi(\hat{g}) = \Phi(f)\Phi(g)$$

また $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$, $\Phi(cf) = c\Phi(f)$ (c は定数) 従って, $\Phi \in \pi(A)$.

$$\therefore \varphi(\hat{f}) = \Phi(f) = \hat{f}(\Phi) \quad (\forall \hat{f} \in \hat{A})$$

$$\therefore \varphi(f) = f(\Phi) \quad (\forall f \in B)$$

Q. E. D.

この事から

$$\pi(\tilde{M}) = \pi(M).$$

§ 2. Examples

G は locally compact abelian group とする.

Example 1 group algebra $L^1(G)$

G が discrete であるとする。従って $L^1(G) = M(G)$ で単位元をもつ。 G の各点の測度を L とし、これが Haar measure であり、 $L^1(G)$ の f, g の積を convolution

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y) g(y) dy = \sum_{y \in G} f(x-y) g(y)$$

にとると、定理 1.2 の条件も満足する c. m. a. になる。

$\pi(L^1(G)) = \hat{G}$ で、 $L^1(G)$ の structure semigroup S は G の Bohr compactification \bar{G} で、 $\hat{S} \subset \hat{G}$ とは isomorphism になる。 $L^1(G)$ は Gelfand 表現 (これも) S の spectral norm で完備化すると、 $(C\hat{S})$ になる。

Example 2. Arens and Singer の algebra ([1], [12])

G は discrete であるとする。 G_+ は G の subsemigroup で、次の性質をもつものとする。

1) G_+ は 零を含む。

2) $G_+ \cup (-G_+) = G$, $G_+ \cap (-G_+) = \{0\}$.

いま、 $M = \{f, f \in L^1(G), f(x) = 0 \text{ for } x \notin G_+\}$

とすると、 M は $L^1(G)$ の closed subalgebra で、定理 1.2 を満足する c. m. a. である。

$\pi(M) = \hat{G}_+$ であり、structure semigroup S は G_+ を (ある意味で) compactification (これも) である。 $\hat{G}_+ \subset \hat{S}$

と isomorphism になる。

M は Gelfand 表現にて得られる function algebra \hat{M} は, spectral norm の完備化にて得られる uniform algebra として \hat{G} (\hat{M} の Shilov boundary, [1] 定理 4.6) 上の C^* -algebra であり, dirichlet algebra になる [3].

特に, $G = \mathbb{Z}$ (整数), $G_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$M = \{f : f \in L^1(\mathbb{Z}) = \ell^1(\mathbb{Z}), f(n) = 0 \text{ for } n < 0\}$$

とすれば、すなわち

$$M \ni f \iff f = \{f(n)\}_{n=0}^{\infty}, \|f\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < +\infty$$

$$M \ni f, g \text{ の convolution は } (f * g)(n) = \sum_{m=0}^n f(n-m)g(m).$$

$$\text{mc}(M) = \hat{G}_+ = \{z \in \mathbb{C}^1; |z| \leq 1\}, f \in M \text{ の Gelfand}$$

表現は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$$

M は Gelfand 表現にて得られる function algebra の spectral norm の完備化であり、disc algebra になる [3]

Example 3. measure algebra $M(G)$

$M(G)$ は定理 1.2 の条件を満足する c. m. a. である。

$M(G)$ の structure semigroup S の構造はよく解ってゐない。

G が "discrete" であるとき, G の dual group $\hat{G} \subset \Delta$ ($\Delta = \text{mc}(M(G))$) は compact であり、 Δ の真部分集合

である。次のような事柄が知られてゐる ([8], [9])。

- a) $M(G)$ は symmetric である。
- b) Δ における G^\wedge の closure は Shilov boundary と交わらない。
- c) G^\wedge は Δ の open subset である。
- d) G^\wedge は connected ならば Δ も connected である。

等々。

更に $M(G)$ の Shilov boundary は Δ の真部分集合である ([4], [13])。

§2. Convolution measure algebra における Gleason part について ([5], [12])

uniform algebra A の maximal ideal space X の元 x, y に対して

$$\|x-y\| = \sup \{ |f(x) - f(y)| : f \in A, \|f\| \leq 1 \}$$

とおき、

$$x \sim y \iff \|x-y\| < 2$$

によつて、 \sim を定義すると、 \sim は同値関係を満足する [2]。

$P(x) = \{y \in X : x \sim y\}$ を x を通る A の Gleason part とする。 $P(x) = \{x\}$ のとき、 $P(x)$ は

one point part である $x \in U$, $P(x) \neq \{x\}$ のときは, $P(x)$ は nontrivial part である。

M を定理 1.2 で与えた c.m.a., S を M の structure semigroup, $\pi(M) = S^\wedge$ から $M \subset M(S)$ と考え, $\hat{M} = \{\nu : \nu \in M\}$ を spectral norm で完備化して得た uniform algebra を \hat{M} で表す。

S^\wedge の性質として, 次のような事が知られている。

- 1) S^\wedge は compact Hausdorff space.
- 2) S^\wedge は S と分離する。
- 3) $1 \in S^\wedge$.

$f, g \in S^\wedge$ とする。

- 4) $\bar{f} \in S^\wedge$, $fg \in S^\wedge$, $|f| \in S^\wedge$.

(\bar{f} は f の complex conjugation)

- 5) $f \geq 0$, $z \in \mathbb{C}^1$, $\operatorname{Re} z > 0$ ならば $f^z \in S^\wedge$.
- 6) $\nu \in M$, $f \geq 0$ ならば

$$\nu(f^z) = \int_S f^z(x) d\nu(x) \in \operatorname{Reg}[z, \operatorname{Re} z > 0].$$

(正則関数)

S^\wedge を Gleason part に分けるとき, 上記の S^\wedge の性質が関係してくる事が期待される。

$f, g, h \in \mathcal{S}^\wedge$ として, Gleason part の性質を列記する.

$$1^\circ) \quad f \sim g \text{ ならば } \bar{f} \sim \bar{g}, \quad f \cdot h \sim g \cdot h.$$

$$2^\circ) \quad f \geq 0, \quad \alpha \in \{\alpha; \alpha \in \mathbb{C}^1, \operatorname{Re} \alpha > 0\} \text{ ならば } f \sim f^\alpha.$$

disc algebra のとき (Example 2), $\mathcal{S}^\wedge = \{z; |z| \leq 1\}$ として
 $\mathcal{S}^\wedge \ni z_1, z_2$ とするとき,

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow (|z_1|=1, z_1 \neq z_2) \vee (|z_2|=1, z_1 \neq z_2).$$

このことから,

$$\mathcal{S}^\wedge \ni f, g$$

$$f \not\sim g \Leftrightarrow \begin{cases} |f(\alpha)|=1, f(\alpha) \neq g(\alpha) \text{ なる } \alpha \in \mathcal{S} \text{ が存在する} \\ |g(\alpha)|=1, f(\alpha) \neq g(\alpha) \text{ なる } \alpha \in \mathcal{S} \text{ が存在する} \end{cases}$$

対偶をとって,

$$f \sim g \Leftrightarrow \{x; |f(x)|=1\} = \{x; |g(x)|=1\} \subseteq \{x; f(x)=g(x)\}$$

の成立する事が推測される.

定理 3.1 $f \sim g$ ならば,

$$\{x; |f(x)|=1\} = \{x; |g(x)|=1\} \subseteq \{x; f(x)=g(x)\}.$$

上記の定理の証明は簡単である. 其逆の成立する事が
 推測される.

Conjecture : 定理 3.1 の逆が成立する.

これに関連して, 次の定理が証明されている.

定理 3.2 $f \geq 0, g \geq 0$ とする.

$$f \sim g \iff \{x : f(x) = 1\} = \{x : g(x) = 1\}$$

次に S^\wedge の one point part を特徴づける.

定義 $H = \{f \in S^\wedge : |f(x)| = 0 \text{ or } 1 \text{ for } \forall x \in S\}$

注意.

$\pi \in S^\wedge, \pi^2 = \pi$ (idempotent) とする. π を含む maximal

group $G^\wedge(\pi)$ は

$$G^\wedge(\pi) = \{h : h \in S^\wedge, h\pi = \pi\}$$

となり, S^\wedge におけるすべての maximal group $G^\wedge(\pi)$ の

和集合は H である [12].

いま, $f \in S^\wedge$ のとき,

$$f'_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) = 0 \\ \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{if } f(x) \neq 0 \end{cases}$$

とおく.

Taylor's Polar decomposition theorem [12],

$f \in S^\wedge$ ならば, $f_0 \in H$ 1 次元かつ $f = |f| f_0$ と表すことができる.

$$f = |f| f_0, \quad f_0 = f'_0 \text{ a.e.-dv } (\forall v \in M)$$

すなわち, すべての $\nu \in M$ に対して, ν -measure zero を除いて $f_0 \in H$ は一意的に決まる.

3°) $P(f) = \{f\}$ (one point part) ならば $f \in H$.

証明. $f \notin H$ ならば, $0 < |f(x)| < 1$ なる $x \in S$ が存在する. よって $|f|^2 \neq |f|$. 1°) 2°) から $f = f_0 |f| \sim f_0 |f|^2 \neq f //$

4°) $f \in H$, $P(f) \ni g$, $f \neq g$ なる $g \in S^\wedge$ が存在する
 ならば $f \sim g_0 |g|^2$ for $\forall z \in \{\operatorname{Re} z > 0\}$. 尤も $g = g_0 |g|$.

5°) $f \in H$ とする.

$$f \sim g \iff \{x: |f(x)|=1\} = \{x: |g(x)|=1\} \subseteq \{x: f(x)=g(x)\}$$

証明 (\Leftarrow) 定理 3.2 より $|f| \sim |g|$. $f = g_0 |f|$ とする.
 とおき $f = g_0 |f| \sim g_0 |g| = g //$

以上まとめて,

定理 3.3 $f \in S^\wedge$ とする. 次の事柄は同値である.

a) $P(f) = \{f\}$

b) $f \in H$ かつ $g \in S^\wedge$, $\{x: |f(x)|=1\} = \{x: |g(x)|=1\} \subseteq \{x: f(x)=g(x)\}$ ならば $f = g$.

$$6^{\circ}) \quad |f(x)|=1 \quad \text{for } \forall x \in S \Rightarrow P(f) = \{f\}$$

$$7^{\circ}) \quad P(\{f\}) = \{f\} \Rightarrow P(f) = \{f\} \quad (\text{逆は成立しない})$$

\tilde{M} の Choquet boundary ($\text{ch}(\tilde{M})$ と表わす) に属する点は one point part であるから, $\text{ch}(\tilde{M}) \subset H$. $\text{ch}(\tilde{M})$ の closure は \tilde{M} の Shilov boundary であるから, \tilde{M} の Shilov boundary は H に含まれる. しかし, \tilde{M} の Shilov boundary に属しない点で one point part になる例があるから ([3], [5]), one point part の特徴づけは Choquet boundary を特徴づけるものでない。

文献

- [1] R. Arens and I. M. Singer, Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956).
- [2] A. M. Gleason, Function Algebras, Seminars on Analytic Functions II, Inst. for Adv. Study, Princeton, (1957).
- [3] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular Banach algebra, Acta Math. 108 (1962).
- [4] B. E. Johnson, The Shilov boundary of $M(G)$, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968).

- [5] P. R. Miller, Gleason part and Choquet boundary points in convolution measure algebras, Pacific J. Math. 31 (1969).
- [6] R. P. Phelps, Lectures on Choquet's Theorem, Van Nostrand, Princeton, (1966).
- [7] M. A. Rieffel, A characterization of commutative group algebras and measure algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963).
- [8] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience, New York, 1962.
- [9] ———, Measure algebras on Abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959).
- [10] Y. Šreider, The structure of maximal ideal in rings of measures with convolution, Amer. Math. Soc. Transl. (1) 8 (1962).
- [11] K. Stromberg, A note on the convolution of regular measures. Math. Scand. 7 (1959).
- [12] J. L. Taylor, The structure of convolution measure algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965).
- [13] ———, The Shilov boundary of the algebra of measures on a group. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965).